



### **Science Arts & Métiers (SAM)**

is an open access repository that collects the work of Arts et Métiers Institute of Technology researchers and makes it freely available over the web where possible.

This is an author-deposited version published in: <https://sam.ensam.eu>  
Handle ID: <http://hdl.handle.net/10985/10248>

#### **To cite this version :**

Stéphane CHAMPMARTIN, Abdelhak AMBARI, Jean-Yves LE POMMELLEC - Force et ascension capillaires sur une bille partie 1 : détermination de la tension de surface - In: 12 ème Congrès de Mécanique du Maroc, Maroc, 2015-04 - 12 ème Congrès de Mécanique du Maroc - 2015

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository

Administrator : [scienceouverte@ensam.eu](mailto:scienceouverte@ensam.eu)



# FORCE ET ASCENSION CAPILLAIRES SUR UNE BILLE PARTIE 1 : DETERMINATION DE LA TENSION DE SURFACE

CHAMPMARTIN S., AMBARI A., LE POMMELEC J.-Y.

LAMPA, Arts et Métiers-ParisTech, 2 bd du Ronceray, 49035 Angers, France

## Introduction

Les interactions entre un liquide et une surface solide sont des plus courantes dans notre environnement quotidien : enduction, imprégnation, évaporation, galvanisation, traitements des surface... [1]. La caractérisation de ces interactions passe obligatoirement par la mesure de la tension de surface  $\sigma$ . Parmi les techniques classiques de tensiométrie, on trouve la méthode de l'ascension capillaire basée sur la loi de Jurin, celle de la goutte pendante, la stalagnométrie, les tensiomètres de Wilhelmy avec plaque ou de du Noüy avec anneau et la tensiométrie à pression de bulle [2-4]. Dans ce travail, nous proposons une nouvelle technique permettant de déterminer  $\sigma$  à partir des propriétés du ménisque se formant sur une bille. L'originalité de la méthode réside dans le fait que la connaissance de l'angle de contact  $\theta$  n'est pas nécessaire contrairement aux méthodes de tensiométrie classiques [2-4].

## Analyse théorique

On cherche à déterminer le profil du ménisque qui se forme sur une bille lorsqu'elle entre en contact avec un liquide mouillant de masse volumique  $\rho$  et de tension de surface  $\sigma$ . On désire connaître notamment la hauteur d'ascension  $z_0$  de ce ménisque par rapport au niveau de liquide dans le réservoir. Le profil de cette interface est celui d'une surface de révolution s'étendant à l'infini et qui s'appuie sur une surface solide sphérique de rayon  $b$  (Fig.1). La forme de ce profil est solution de l'équation de Young-Laplace :

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \frac{z}{a^2} \quad (1)$$

où  $r_1$  et  $r_2$  sont les rayons de courbures principaux de l'interface et  $a = \sqrt{\sigma/\rho g}$  la longueur capillaire (de l'ordre de quelques millimètres pour les liquides courants). Dans le cas présent, l'équation (1) n'a pas de solution analytique et doit être résolue numériquement pour trouver la hauteur

d'ascension du ménisque  $z_0$ . Ferguson [5] a donné une solution approchée de l'équation (1) dans le cas d'un ménisque se formant au contact d'une surface cylindrique verticale. En remarquant que dans notre problème, la forme du ménisque est indépendante du volume de liquide pour  $r < r_0$ , le profil du ménisque est donc le même que s'il se formait sur un cylindre de rayon égal à celui de la ligne triple  $r_0$  mais avec un angle de contact effectif égal à  $\beta_0 = \theta - \alpha$  (cet angle est celui que fait la tangente au ménisque au niveau de la ligne triple avec la verticale) et avec l'angle  $\alpha$  tel que :

$$\tan \alpha = \frac{b - z_0}{r_0} \quad (2)$$

Le rayon de la ligne triple est :

$$r_0 = \sqrt{z_0(2b - z_0)} \quad (3)$$

L'équation donnant  $z_0$  dans l'approximation de Ferguson [5] s'écrit alors comme :

$$\sin \beta_0 = 1 - \frac{z_0^2}{2a^2} + \frac{4a}{3r_0} \left[ \left( 1 - \frac{z_0^2}{4a^2} \right)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] \quad (4)$$

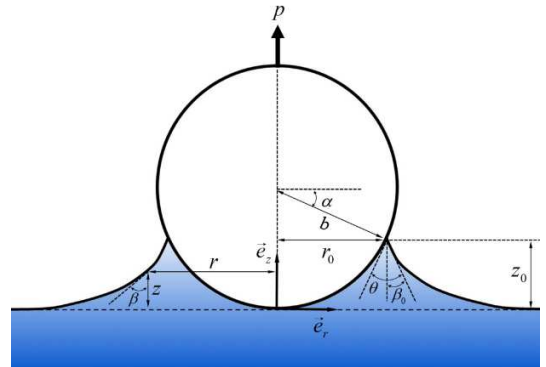


Fig.1 : schéma et définition des paramètres du problème

La solution de l'équation (4) est très précise dès que  $b > 2a$  ce qui correspond à des nombres de Bond  $Bo > 4$  ( $Bo = (b/a)^2$  compare l'influence des forces de gravité et de capillarité). Pour des liquides classiques, cela correspond à des billes de rayon de l'ordre de 5mm au minimum. Si on mesure  $z_0$ , on ne peut pas encore déterminer  $a$  (et donc  $\sigma$ ) à partir de l'équation (4) car l'angle de contact  $\theta$  est inconnu. Sa mesure n'est pas triviale car  $\theta$  présente une hystérésis d'au moins 10° entre l'avancée et la reculée, dépend de nombreux paramètres comme l'état de surface du solide, du temps etc. Dans la plupart des techniques de tensiométrie, on s'arrange pour que  $\theta$  soit proche de zéro afin d'éviter sa mesure (mesure à l'arrachement par exemple) ce qui est parfois difficile à réaliser. Il est possible d'éliminer cette contrainte

en introduisant une seconde équation donnant la force verticale  $p$  qu'exerce le ménisque sur la bille. Cette force correspond au poids du liquide déplacé et se compose de la projection verticale de la force capillaire avec un angle de contact effectif  $\beta_0$  et du poids du volume de liquide situé dans le ménisque pour  $r < r_0$  :

$$p = 2\pi r_0 \sigma \cos \beta_0 + \rho g \pi z_0^2 \left( b - \frac{2z_0}{3} \right) \quad (5)$$

L'angle  $\beta_0$  peut être exprimé à partir de l'équation (5) sous la forme suivante :

$$\cos \beta_0 = \frac{p - \rho g \pi z_0^2 (b - 2z_0/3)}{2\pi \rho g r_0 a^2} \quad (6)$$

Pour une bille donnée ( $b$  fixé), les équations (4) et (6) donnent  $\sin \beta_0$  et  $\cos \beta_0$  en fonction de  $z_0$ ,  $p$  et de la longueur capillaire  $a$ . La mesure de  $p$  et de  $z_0$  permettent ainsi d'exprimer  $\sin \beta_0$  et  $\cos \beta_0$  en fonction de  $a$  uniquement. On peut alors résoudre numériquement l'équation non-linéaire suivante :

$$\sin^2 \beta_0 + \cos^2 \beta_0 = 1 \quad (7)$$

La solution de (7) donne la longueur capillaire  $a$  puis la tension de surface. Pour les applications numériques basées sur les mesures expérimentales décrites ci-dessous, le logiciel Mathematica a été utilisé pour résoudre l'équation (7).

### Vérification expérimentale

Le schéma du montage est présenté dans la figure 2 ci-dessous. Nous avons mesuré  $z_0$  et  $p$  pour trois liquides courants : l'eau du robinet, l'huile de ricin et le glycérol. Nous avons utilisé deux billes d'acier de rayon  $b = 10,15 \text{ mm}$  et  $b = 11,5 \text{ mm}$  normalement utilisées dans des roulements à billes. Le rayon de ces billes est tel que l'hypothèse de validité de la solution de Ferguson est bien respectée ( $Bo > 15$  pour toutes les expériences).

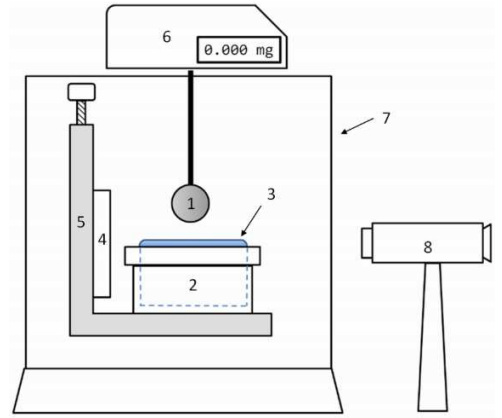


Fig.2: (1) sphère, (2) réservoir, (3) interface air/liquide, (4) rétroéclairage, (5) table micrométrique, (6) balance de précision, (7) enceinte vitrée, (8) appareil photo

Les billes sont fixées sur un axe rigide relié à une balance de précision permettant la mesure de la force  $p$ . Le protocole de mesure consiste à déplacer verticalement le réservoir grâce à un plateau mobile monté sur une table micrométrique jusqu'au contact de la bille avec le liquide. En fonction de la viscosité des liquides, le ménisque met un temps plus ou moins long à se former (de l'ordre de 10 ms pour l'eau et de l'ordre de 4 s pour le glycérol et l'huile de ricin). En raison de la taille finie du réservoir, le volume de liquide formant le ménisque occasionne une baisse du niveau dans le réservoir. On peut montrer que la force mesurée  $p_{mes}$  est légèrement surestimée par rapport à la force théorique à cause du décalage du plan de référence. En utilisant la conservation du volume, la correction de la force s'écrit :

$$p_{cor} = p_{mes} \left( 1 - \frac{r_0^2}{R_t^2} \right) \quad (8)$$

où  $R_t = 6 \text{ cm}$  est le rayon du réservoir. On a ici  $0,936 < 1 - r_0^2/R_t^2 < 0,970$ . Les mesures des forces dans le tableau 1 ont été corrigées par (8) pour obtenir les valeurs de la tension de surface. La hauteur  $z_0$  est obtenue par imagerie : le ménisque formé est photographié puis le rayon  $r_0$  est mesuré (traitement par le logiciel ImageJ). La valeur de  $z_0$  est déduite de l'équation (3). Le tableau 1 rassemble les valeurs des paramètres des expériences réalisées, les mesures effectuées et les résultats déduits pour la tension de surface. Aux erreurs de mesure près, on note que  $\sigma$  est indépendante de la taille de la bille utilisée ce qui confirme la robustesse de notre méthode. On obtient pour l'eau du robinet  $\sigma \cong 64,5 \text{ mN/m}$  (valeur inférieure à celle de l'eau pure), pour l'huile de ricin

$\sigma \cong 34,4 \text{ mN/m}$  et pour le glycérol  $\sigma \cong 63,6 \text{ mN/m}$ , en bon accord avec les valeurs de la littérature aux températures de travail. Ces résultats ont été validés par ceux que nous avons obtenus en utilisant un tensiomètre à goutte pendante (différences relatives inférieures à 5%).

	<i>b</i>	<i>z</i> <sub>0</sub>	<i>p</i> <sub>mes</sub> / <i>g</i>	<i>σ</i>
	( <i>mm</i> )	( <i>mm</i> )	( <i>mg</i> )	( <i>mN/m</i> )
<b>Eau</b> ( <b>T=23,1°C</b> )	10,15	1,84	285	64,66
	11,50	1,99	347	64,27
<b>Huile de ricin</b> ( <b>T=24,0°C</b> )	10,15	2,82	344	33,60
	11,50	2,90	409	35,11
<b>Glycérol</b> ( <b>T=22,3°C</b> )	10,15	1,77	305	63,59
	11,50	1,96	385	63,56

Tab.1 : paramètres de travail et résultats des mesures expérimentales

En supposant que les principales sources d’incertitudes sont celles sur les mesures de *p* et de *z*<sub>0</sub>, on peut estimer que l’incertitude relative sur la tension de surface s’écrit :

$$\frac{\Delta \sigma}{\sigma} \cong \frac{2 \Delta p}{p} + \frac{5 \Delta z_0}{z_0} + \frac{\Delta z_0}{2b - z_0} \quad (9)$$

Nous avons estimé l’incertitude sur la mesure de *z*<sub>0</sub> à 10 *μm* et celle sur la masse à 1 *mg* (précision à l’affichage de la balance). A partir des valeurs du tableau 1, on trouve une incertitude relative inférieure à 4 % pour les trois liquides testés.

### Conclusion

Dans ce travail, nous avons démontré la faisabilité de la mesure de la tension de surface *σ* d’un liquide à partir des mesures de la hauteur d’ascension *z*<sub>0</sub> et de la force verticale *p* engendrés par un ménisque sur une bille. L’originalité de cette approche repose sur le fait que la connaissance de la valeur de l’angle de contact n’est pas nécessaire. Pour cela, nous avons utilisé une solution de l’équation de Young-Laplace en adaptant à la géométrie sphérique les hypothèses utilisées par Ferguson dans le cas d’un ménisque se formant sur une fibre cylindrique. Les mesures expérimentales pour l’eau, l’huile de ricin et le glycérol ont donné des valeurs en bon accord avec celles que nous avons mesurées grâce à un tensiomètre à goutte pendante. Ces résultats valident cette nouvelle technique de mesure.

### Bibliographie

[1] P.G. de Gennes, F. Brochard-Wiart and D. Quéré, Capillarity and Wetting Phenomena: Drops, Bubbles, Pearls, Waves, Springer (2004)

[2] A.I. Rusanov and V.A. Prokhorov, Interfacial Tensiometry, in “Studies of Interface Science”, Vol. 3, D. Möbius and R. Miller (Editors), Elsevier, Amsterdam, 1996

[3] A.W. Adamson, A.P. Gast, Dynamic Methods of Measuring Surface Tension in “Physical Chemistry of Surfaces”, 6th Ed.; John Wiley & Sons, Inc.: New York, 1997, pp 36-49

[4] J. Drelich, C. Fang and C.L. White, Measurement of interfacial tension in fluid-fluid systems in “Encyclopedia of Surface and Colloid Science”, Marcel Dekker, Inc., New York 2003, pp. 3152-3166

[5] A. Ferguson, On the shape of the capillary surface formed by the external contact of a liquid with a cylinder of large radius, Phil. Mag. 24 (Ser.6) 837-844, 1912